SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Davide Guidetti

STIME IN $W^{2m,p}(\Omega)$ PER PROBLEMI AL CONTORNO ELLITTICI A COEFFICIENTI NON NECESSARIAMENTE CONTINUI

13 maggio 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Summary. A priori estimates in $W^{2m,p}(\Omega)$ for solutions of general elliptic boundary value problems with continuous coefficients are well known. Here we review some of the literature concerning the extension of these results to the case of discontinuous coefficients. Most of it deals with second order equations. We present some very recent results due to the author on general elliptic boundary value problems. .

Riassunto. Sono ben note stime a priori in $W^{2m,p}(\Omega)$ per soluzioni di problemi al contorno ellittici generali a coefficienti continui. Qui passiamo in rassegna una parte della letteratura sull' estensione di questi risultati al caso di coefficienti discontinui. La maggior parte di essa riguarda equazioni del secondo ordine. Presentiamo alcuni recenti risultati dovuti all'autore su problemi al contorno ellittici generali.

Scopo di questo seminario é esporre alcuni risultati sulla validitá di stime a priori in $W^{2m,p}$ per soluzioni di problemi al contorno ellittici a coefficienti non necessariamente continui. Cominciamo con il ben noto caso dei coefficienti continui. In quest'ambito abbiamo il notissimo articolo di S. Agmon, A. Douglis e L. Nirenberg [1]. Uno dei principali risultati di questo lavoro é il seguente: consideriamo il problema al contorno ellittico

$$\begin{cases} A(x,\partial_x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ B_j(x',\partial_x)u(x') = g_j(x') & x' \in \partial\Omega, \quad 1 \le j \le m, \end{cases} \tag{1}$$

con $A(x,\partial_x)$ propriamente ellittico di ordine $2m$ a coefficienti in $C(\overline{\Omega})$, con Ω aperto limitato in $\mathbf{R}^n$ dotato di frontiera sufficientemente regolare, per $1 \le j \le m$ $B_j(x',\partial_x)$ operatore di frontiera di ordine $r_j \le 2m-1$. Sotto opportune ipotesi sugli operatori $B_j(x',\partial_x)$ vale il seguente risultato: sia $1 < p < +\infty$; esiste una costante C positiva tale che, se $f \in L^p(\Omega)$, per $1 \le j \le m$, $g_j \in W^{2m-r_j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ e u é una soluzione in $W^{2m,p}(\Omega)$ di (1), vale

$$||u||_{2m,p,\Omega} \le C(||f||_{0,p,\Omega} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j||_{2m-r_j-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} + ||u||_{0,p,\Omega}). \tag{2}$$

Si sottolinea il fatto che C dipende solo da p. La disuguaglianza (2) é alla base di molte importanti ricerche su questi problemi. La classe dei problemi a cui la stima ora citata é applicabile é assai vasta, comprendendo, ad esempio, il problema di Dirichlet di ordine qualunque e i problemi di derivata obliqua regolari per $A(x,\partial_x)$ del secondo ordine.

I risultati di [1] furono ottenuti quasi contemporaneamente da F. Browder, che li espose in una serie di articoli (vedi [2]).

Veniamo ora a una serie di lavori in cui, sia pure per classi di problemi assai piú limitate di quella considerata nei lavori precedentemente citati, si perviene a stime del tipo di (2) sotto ipotesi che non implicano la continuitá dei coefficienti di $A(x,\partial_x)$.

Un posto a parte lo merita innanzi tutto il lavoro [17] di G. Talenti, in cui si prova una stima del tipo (2) nel caso $p = 2$ e $n = 2$ per un problema di derivata obliqua nulla con un'equazione del secondo ordine nella sola ipotesi che i coefficienti di $A(x,\partial_x)$ siano misurabili e limitati.

Un altro interessante risultato fu ottenuto da C. Miranda in [14]. Egli provó una stima del tipo (2) nel caso di $A(x,\partial_x)$ del secondo ordine con condizioni di Dirichlet e di derivata conormale sotto l'ipotesi che i coefficienti

dell'operatore ellittico stessero in $W^{1,n}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Una generalizzazione di questo risultato fu ottenuta da M. Franciosi e N. Fusco in [9]: essi dimostrarono che basta prendere i coefficienti limitati con solo $n-1$ derivate prime in $L^n(\Omega)$.

Estensioni dei risultati precedenti con condizioni di tipo Cordes (e argomenti di tipo perturbativo) furono date da M. Giaquinta ([10]), M. Chicco ([6]), F. Nicolosi ([16]), G. Viola ([18]).

Veniamo ora ai risultati di F. Chiarenza, M. Frasca e P. Longo (vedi [4] e [5]). Cominciamo con l'introdurre alcune definizioni e risultati.

Siano Ω un aperto in $\mathbf{R}^n$, $r > 0$, $x \in \Omega$. Poniamo

$$\Omega_{x,r} := \Omega \cap B_r(x) = \{y \in \Omega | |y - x| < r\}.$$

Se f é sommabile su ogni sottoinsieme limitato di Ω, poniamo

$$f_{x,r} := \frac{1}{L_n(\Omega_{x,r})} \int_{\Omega_{x,r}} f(y)dy$$

e

$$|f|_{*,\Omega} := \sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{L_n(\Omega_{x,r})} \int_{\Omega_{x,r}} |f(y) - f_{x,r}|dy,$$

ove indichiamo con L_n la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$. Definiamo $BMO(\Omega)$ come la classe delle funzioni integrabili su ogni sottonsieme limitato di Ω tali che $|f|_{*,\Omega} < +\infty$. Sia poi

$$\eta(r) = \sup_{x\in\Omega, 0<\rho<r} \frac{1}{L_n(\Omega_{x,\rho})} \int_{\Omega_{x,\rho}} |f(y) - f_{x,\rho}|dy.$$

Diremo che $f \in VMO(\Omega)$ se $\lim_{r\to 0} \eta(r) = 0$.

É immediato verificare che $L^\infty(\Omega) \subseteq BMO(\Omega)$. Inoltre se $\partial\Omega$ ha un minimo di regolaritá (ad esempio, é lipschitziana) e f ha le derivate prime nel senso delle distribuzioni nello spazio L^n debole su Ω, cioé esiste $C > 0$ tale che per ogni $t > 0$ e per $j = 1, ..., n$

$$L_n(\{y \in \Omega | |\partial_j f(y)| > t\}) \leq Ct^{-n},$$

allora $f \in BMO(\Omega)$. Se poi f é uniformemente continua su Ω, allora $f \in VMO(\Omega)$. Altre condizioni sufficienti per l'appartenenza a $VMO(\Omega)$ nel caso di frontiera sufficientemente regolare sono $f \in W^{\theta,\frac{n}{\theta}}(\Omega)$ per ogni $\theta \in]0,1]$ (vedi per alcuni di questi risultati [4]). Sottolineiamo il fatto che un

elemento di $VMO(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ non appartiene necessariamente a $C(\overline{\Omega})$. Sia infatti Ω la palla unitaria in $\mathbf{R}^n$ per $n \geq 2$ e $f(x) = \sin(\ln(\ln(\frac{4}{|x|})))$. Si vede facilmente che $f \in W^{1,n}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ per $n \geq 2$, ma, chiaramente, $f \notin C(\overline{\Omega})$.

Torniamo per un attimo alle stime per problemi al contorno ellittici. Ricordiamo che nel caso dei coefficienti continui, la strategia in [1] e in [2] é la seguente:

(I) si cercano le stime per i problemi a coefficienti costanti in un semispazio; lo strumento principale in questa fase é la teoria degli integrali singolari;

(II) tramite sistemi di carte locali si trasforma localmente il problema in Ω in un problema nel semispazio;

(III) sfruttando la continuitá dei coefficienti, si cercano le stime per i coefficienti variabili perturbando un problema a coefficienti costanti.

Il passo (I) puó essere realizzato utilizzando il seguente ben noto teorema (vedi [3]):

Teorema 1 *Sia K positivamente omogenea di grado $-n$ su $\mathbf{R}^n - \{0\}$, a quadrato sommabile sulla sfera unitaria S^{n-1} rispetto alla misura di superficie σ. Valga inoltre*

$$\int_{S^{n-1}} K(x')\sigma(dx') = 0.$$

Per $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, indichiamo con $v.p.K(x)$ la distribuzione cosí definita:

$$< v.p.K(x), v(x) >:= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} K(x)v(x)dx$$

e con T l'operatore di convoluzione

$$Tv(x) := (v.p.K * v)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)v(y)dy.$$

Allora per ogni $p \in]1, +\infty[$ esiste $C = C(p) > 0$ tale che per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$||Tv||_{0,p,\mathbf{R}^n} \leq C||K||_{L^2(S^{n-1})}||v||_{0,p,\mathbf{R}^n}.$$

Segue che T puó essere prolungato a un operatore lineare e continuo su tutto $L^p(\mathbf{R}^n)$, che continueremo a indicare con T. Per ovviare alla difficoltá dei coefficienti discontinui, sono utili i seguenti due teoremi, entrambi dimostrati in [4] (il secondo di essi é una generalizzazione di un teorema dovuto a Coifman, Rochberg, Weiss, vedi [7]):

Teorema 2 *Sia* $K : \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n - \{0\}) \to \mathbf{C}$ *tale che:*

(a) per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ $K(x,.) \in C^{2n}(\mathbf{R}^n - \{0\})$ *e soddisfa le condizioni del teorema 1;*

(b) per ogni $y \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ *e per ogni* $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ *con* $|\alpha| \leq 2n$ $\partial_y^\alpha K(.,y) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ *e*

$$\max_{|\alpha|\leq 2n} \sup_{x\in\mathbf{R}^n, |y|=1} |\partial_y^\alpha K(x,y)| = M < +\infty.$$

Data $v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, *si ponga*

$$Tv(x) := v.p. \int_{\mathbf{R}^n} K(x, x-y)v(y)dy.$$

Allora, per ogni $p \in]1, +\infty[$ *esiste* $C = C(p, M)$ *positivo per cui si ha*

$$||Tv||_{0,p,\mathbf{R}^n} \leq C||v||_{0,p,\mathbf{R}^n}.$$

Come prima considereremo il prolungamento continuo di T a tutto $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 3 *Sia* T *come nel teorema 2,* $a \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$; *consideriamo il commutatore*

$$[a,T]v(x) := a(x)Tv(x) - T(av)(x)$$
$$= v.p. \int_{\mathbf{R}^n} K(x, x-y)[a(x) - a(y)]v(y)dy.$$

Allora per ogni $p \in]1, +\infty[$ *esiste* $C = C(p, M)$ *positivo tale che per ogni* $v \in L^p(\mathbf{R}^n)$

$$||[a,T]v||_{0,p,\mathbf{R}^n} \leq C|a|_{*,\mathbf{R}^n}||v||_{0,p,\mathbf{R}^n}.$$

Applichiamo ora i risultati precedenti per ottenere stime all'interno. Premettiamo il seguente risultato, ancora contenuto in [4]:

Lemma 1 *Sia* Ω *un aperto in* $\mathbf{R}^n$, $a \in VMO(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$; *allora per ogni* $\epsilon > 0$ *esistono* $\delta > 0$ *e* $\tilde{a} \in BMO(\mathbf{R}^n)$ *tali che:*

(I) $a_{|\Omega_{x_0,\delta}} = \tilde{a}_{|\Omega_{x_0,\delta}}$;

(II) $|\tilde{a}|_{*,\mathbf{R}^n} \leq \epsilon$.

Proviamo ora il seguente risultato:

Teorema 4 *Sia* $A = A(x, \partial)$ *un operatore propriamente e uniformemente ellittico di ordine* $2m$ *con coefficienti in* $L^\infty(\Omega)$ *e quelli delle derivate di ordine massimo in* $VMO(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Sia* ω *un sottoinsieme aperto di* Ω *a chiusura compatta in* Ω. *Allora per ogni* $u \in W^{2m,p}(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ *esiste* $C = C(p, \omega) > 0$ *tale che*

$$||u||_{2m,p,\omega} \leq C(||A(x,\partial)u||_{0,p,\Omega} + ||u||_{0,p,\Omega}.$$

Dimostrazione Per densitá e partizioni dell'unitá basta provare il risultato per una $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ con supporto in una certa palla $B_\delta(x_0)$ di raggio $\delta > 0$ convenientemente piccolo. Ci si puó inoltre limitare a un operatore coincidente con la sua parte principale. Per $z \in B_\delta(x_0)$, indichiamo con $B(\partial)$ l'operatore a coefficienti costanti $A(z, \partial)$ e poniamo $g := Bu$. Utilizzando la trasformata di Fourier e supponendo $n \geq 2$, in modo che, per $|\beta| = 2m - 1$, $\xi \to (i\xi)^\beta / B(i\xi) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$, si ricava facilmente

$$\mathcal{F}(\partial^\beta)u = \frac{(i\xi)^\beta}{B(i\xi)} \mathcal{F}g,$$

da cui

$$\partial^\beta u = H * f,$$

con $H = \mathcal{F}^{-1}(\frac{(i\xi)^\beta}{B(i\xi)})$. Da noti risultati sulle distribuzioni omogenee, si ha che H é di tipo funzione, di classe C^∞ su $\mathbf{R}^n - \{0\}$, omogenea di grado $1-n$. Si vede facilmente che, per $j = 1, ..., n$ $K_j(z, .) := \partial_j H_{|\mathbf{R}^n - \{0\}}$ soddisfa tutte le ipotesi del teorema 1 ed é di classe C^∞. Inoltre, nel senso delle distribuzioni,

$$\partial_j H = v.p. K_j(z, .) + c_j(z)\delta,$$

con $c_j(z) = \int_{S^{n-1}} H(x')x_j\sigma(dx')$; di qui

$$\partial^{\beta+e_j} u(x) = v.p. \int_{\mathbf{R}^n} K_j(z, x-y)A(z, \partial)u(y)dy + c_j(z)A(z, \partial)u(x).$$

Per la regolaritá di u questa formula vale puntualmente per ogni z e x in Ω. Scegliendo $z = x$, si ottiene

$$\partial^{\beta+e_j} u(x) = v.p. \int_{\mathbf{R}^n} K_j(x, x-y)A(x, \partial)u(y)dy + c_j(x)A(x, \partial(x)$$

$$= v.p. \int_{\mathbf{R}^n} K_j(x, x-y)A(y, \partial)u(y)dy$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2m} \int_{\mathbf{R}^n} K_j(x, x-y)[a_\alpha(x) - a_\alpha(y)]\partial^\alpha u(y)dy + c_j(x)A(x, \partial)u(x).$$

In base al lemma 1, scegliendo δ sufficientemente piccolo, possiamo modificare tutte le a_α in modo che siano definite su tutto $\mathbf{R}^n$ e valga

$$|a_\alpha|_{*,\mathbf{R}^n} \leq \epsilon.$$

Segue allora dai teoremi 2 e 3

$$||\partial^{\beta+e_j}u||_{0,p,\Omega}$$

$$\leq C(||A(x,\partial)u||_{0,p,\Omega} + \epsilon \sum_{|\alpha|=2m} ||\partial^\alpha u||_{0,p,\Omega}),$$

da cui, per ϵ sufficientemente piccolo, si ottiene facilmente quanto voluto.

Passiamo ora alle stime vicino alla frontiera. Il seguente teorema é uno dei principali risultati di [5]:

Teorema 5 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, con frontiera di classe $C^{1,1}$ e Ω che giace su un solo lato della sua frontiera. Sia poi $A = A(x,\partial)$ un operatore differenziale lineare propriamente e uniformemente ellittico del secondo ordine, con coefficienti in $VMO(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; allora per ogni $p \in]1,+\infty[$ esiste $C(p) > 0$ tale che per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$||u||_{2,p,\Omega} \leq C(p)(||Au||_{0,p,\Omega} + ||u||_{0,p,\Omega}).$$

La dimostrazione del teorema 5 segue le idee utilizzate nella dimostrazione del teorema 4 e utilizza una classica formula di rappresentazione della soluzione nel caso dei coefficienti costanti in un semispazio. Tale formula di rappresentazione si ricava dal caso classico dell'operatore di Laplace dal principio di riflessione di Schwarz (vedi [15]). Il teorema 5 é stato esteso al caso regolare del problema della derivata obliqua in [8]. Anche qui il procedimento segue le idee giá esposte. La formula di rappresentazione adottata si trova in [11] 6.7 ed é ancora ottenuta tramite riflessione.

Le formule di rappresentazione nel caso di un'equazione del secondo ordine utilizzate in [5] e in [8] non sembrano facilmente estendibili al caso di un generico problema al contorno ellittico del tipo studiato in [1] e in [2]. Vale tuttavia la seguente generalizzazione dei risultati precedenti (vedi [12]):

Teorema 6 *Sia $m \in \mathbf{N}$, Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^{2m-1,1}$, $A = A(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ un operatore differenziale lineare su Ω, per $j = 1,...,m$ $B_j = B_j(x',\partial) = \sum_{|\beta|\leq r_j} b_{j,\beta}(x')\partial^\beta$ un operatore differenziale lineare a coefficienti definiti su $\partial\Omega$; supponiamo che:*

(a) per ogni α $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e, se $|\alpha| = 2m$, $a_\alpha \in VMO(\Omega)$;

(b) A é propriamente e uniformemente ellittico;

(c) per $j = 1,...,m$ $0 \leq r_1 < r_2 < ... < r_m \leq 2m-1$;

(d) i coefficienti $b_{j,\beta}$ di B_j sono di classe $C^{2m-r_j-1,1}(\partial\Omega)$;

(e) indichiamo con $\nu(x')$ il versore normale interno a $\partial\Omega$ in $x' \in \partial\Omega$; allora, per $j = 1, ..., m$,

$$\sum_{|\beta|=r_j} b_{j,\beta}(x')\nu(x')^\beta \neq 0;$$

(f)indichiamo con $T_{x'}(\partial\Omega)$ lo spazio tangente a $\partial\Omega$ in x', con $A^\sharp$ e $B_j^\sharp$ le parti principali degli operatori. Allora per ogni $x' \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x' e una curva Γ con sostegno in $\{z \in \mathbf{C}|Rez < 0\}$ tale che l'interno di Γ contiene tutti gli zeri con parte reale negativa di

$$A^\sharp(x, i\xi' + z\nu(x')) = 0, \tag{3}$$

prendendo in tutti i modi possibili $x \in U \cap \Omega$, $\xi' \in T_{x'}(\partial\Omega)$ con $|\xi'| = 1$. Inoltre esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $x \in U \cap \Omega$, per ogni $\xi' \in T_{x'}(\partial\Omega)$ con $|\xi'| = 1$ vale

$$|det(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^r \frac{B_j^\sharp(x', i\xi' + \lambda\nu(x'))}{A^\sharp(x, i\xi' + \lambda\nu(x'))} d\lambda)_{1\leq j, r+1\leq m})| \geq \nu. \tag{4}$$

Sia $p \in]1, +\infty[$; allora esiste $C > 0$ tale che per ogni $u \in W^{2m,p}(\Omega)$

$$||u||_{2m,p,\Omega} \leq C(||Au||_{0,p,\Omega} + \sum_{j=1}^{m} ||B_j u||_{2m-r_j-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} + ||u||_{0,p,\Omega}).$$

La dimostrazione di questo risultato si puó ottenere riducendosi al caso di un semispazio e utilizzando una formula di rappresentazione per le derivate di ordine $2m$ della soluzione di un problema a coefficienti costanti simile a quella data in [2] e utilizzando opportunamente i teoremi 2 e 3.

Concludiamo osservando che le condizioni 3 e 4 in (f) costituiscono quella che si chiama solitamente la condizione complementare o di Lopatinskii. Nel caso dei coefficienti continui tale condizione viene richiesta soltanto per $x = x'$ e automaticamente si ottiene (f).

Bibliografia

[1] S. Agmon,A. Douglis, L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions", Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959).

[2] F. Browder, "A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems, I, II, III", Indag. Math., I 22, 145-159 (1960), II 22, 160-169 (1960), III 23, 404-410 (1961).

[3] A. P. Calderon, A. Zygmund,"On singular integrals", Amer. J. Math. 78, 289-309 (1956).

[4] F. Chiarenza, M. Frasca. P. Longo, "Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence ellipptic equations with discontinuous coefficients", Ric. Mat. 60, 149-168 (1990).

[5] F. Chiarenza, M. Frasca. P. Longo, "$W^{2,p}$ solvability of the Dirichlet problem for non-divergence elliptic equations with VMO coefficients", Tran. Amer. Mat. Soc. 336, n. 2, 841-853 (1993).

[6] M. Chicco, "Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine con coefficienti discontinui", Ann. Mat. Pura Appl., ser. IV, 112, 241-259 (1977).

[7] R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, "Factorization theorems for Hardy spaces in several variables", Ann. Math. 103, 611-635 (1976).

[8] G. Di Fazio, D. K. Palagachev, "Oblique derivative problem for elliptic equations in non-divergence form wwith VMO coefficients", Comm. Univ. Carolinae 37, 537-556 (1996).

[9] M. Franciosi, N. Fusco, "A $W^{2,2}$ bound for a class of elliptic equations with discontinuous coefficients", Ric. Mat., 31, 207-218 (1982).

[10] M. Giaquinta, "Equazioni ellittiche di ordine $2m$ di tipo Cordes", Boll. U.M.I. (4) 4, 251-257 (1971).

[11] D. Gilbarg, N. Trudinger, *"Elliptic partial differential equations of second order"*, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag, seconda ed. (1983).

[12] D. Guidetti, lavoro in preparazione.

[13] C. Miranda, "Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui", Ann. Mat. Pura Appl. 63 (1963).

[14] C. Miranda, "*Partial differential equations of elliptic type*", Springer-Verlag (1970).

[15] F. Nicolosi, "Il terzo problema al contorno per le equazioni lineari ellittiche a coefficienti discontinui", Rend. Circ. Mat. Palermo, ser. II, 33, 351-368 (1984).

[16] G. Talenti, "Problemi di derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili", Boll. U. M. I. (3) 22, 505-526 (1967).

[17] G. Viola, "Una stima a priori per la soluzione del terzo problema al contorno associato a una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti non regolari", Boll. U.M.I. (6), 3-B, 397-411 (1984).